



jméno:					
studijní obor: PřF BIMAT					
počet listů (včetně tohoto):					
1	2	3	4	5	celkem



Cvičná bakalářská zkouška, 1. varianta

1. Matematická analýza

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = e^{4(x-y)-x^2-y^2}$.

2. Lineární algebra

Řešte soustavu lineárních rovnic s reálným parametrem p :

$$\begin{aligned} -2x - 11y + 20z &= p \\ 2x - 3y + 5z &= 1 \\ -3x - y + 2z &= -3 \\ 4x + 2y - 3z &= 5. \end{aligned}$$

3. Pravděpodobnost a statistika

Předpokládejme, že výsledek bakalářské zkoušky je náhodná veličina s normálním rozložením se střední hodnotou 72 bodů a směrodatnou odchylkou 9 bodů. Najděte pravděpodobnost, že

- náhodně vybraná studentka bude mít výsledek nad 80 bodů;
 - průměr výsledků náhodného výběru patnácti studentů bude větší než 80 bodů.
- (U této úlohy by byly k dispozici statistické tabulky.)

4. Vícerozměrné metody

V experimentu byla u 5 buněčných linií zjišťována kvantita membránových markerů popisujících jejich citlivost k chemoterapii. V přiložené tabulce naleznete změřené hodnoty standardizované na referenční buněčnou linii.

Buněčná linie	Marker 1	Marker 2
A	2	4
B	2	8
C	6	10
D	10	14
E	11	13

Vztahy mezi liniemi jsou vyjádřeny následující asociační maticí:

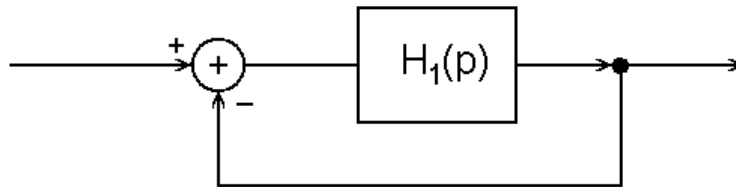
	A	B	C	D	E
A	0,0	4,0	7,2	12,8	12,7
B	4,0	0,0	4,5	10,0	10,3
C	7,2	4,5	0,0	5,7	5,8
D	12,8	10,0	5,7	0,0	1,4
E	12,7	10,3	5,8	1,4	0,0

Proveďte shlukování buněčných linií pomocí aglomerativního hierarchického shlukování, získejte následující výstupy a odpovězte na otázky:

1. Výše uvedená asociační matice vyjadřuje podobnost nebo vzdálenost? Zdůvodněte. (2 body)
2. K výpočtu prvků asociační matice byl použit Jaccardův koeficient, Gowerův koeficient, Euklidova metrika nebo Hammingova (manhattanská) metrika? Zapište definiční vztah tohoto koeficientu či metriky. (2 body)
3. Zdůvodněte vhodnost či nevhodnost použití tohoto koeficientu či metriky v případě těchto dat. (1 bod)
4. Vytvořte dendrogram pomocí algoritmu nejbližšího souseda, rozepište jednotlivé kroky výpočtu. (2 body)
5. Pokud bychom v dendrogramu provedli řez na podobnosti/vzdálenosti 5, kolik dostaneme shluků? (1 bod)
6. Vyjmenujte další dva další algoritmy, které je možné využít při aglomerativním hierarchickém shlukování. U každého z nich popište jednou větou jeho princip (2 body).

5. Signály a systémy

Mějme systém dle níže uvedeného obrázku,



kde subsystém v přímé větvi je definován vztahem $H_1(p) = 1/(p - 0,5)$.

- a) Je celkový systém
 - i) lineární? Proč?
 - ii) diskrétní? Proč?
- b) Je dílčí systém v přímé větvi stabilní?
- c) Je celková struktura systému stabilní?
- d) Určete diferenciální rovnici popisující vlastnosti výsledného zapojení?
- e) Jakého řádu je výsledné zapojení?

Čas pro vypracování je 120 minut. Každá úloha je hodnocena maximálně 10 body.



jméno:					
studijní obor: PřF BIMAT					
počet listů (včetně tohoto):					
1	2	3	4	5	celkem



Cvičná bakalářská zkouška, 2. varianta

1. Matematická analýza

Určete objem V tělesa omezeného plochami: $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$ (v \mathbb{R}^3).

2. Lineární algebra

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 jsou zadány podprostory U , V takto: U je generován vektory

$$u_1 = (-1, 3, 2, 1), u_2 = (2, -1, 1, -2),$$

V je množinou všech řešení následující soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\x_2 - x_3 - x_4 &= 0.\end{aligned}$$

Nalezněte bázi součtu $U + V$ a bázi průniku $U \cap V$.

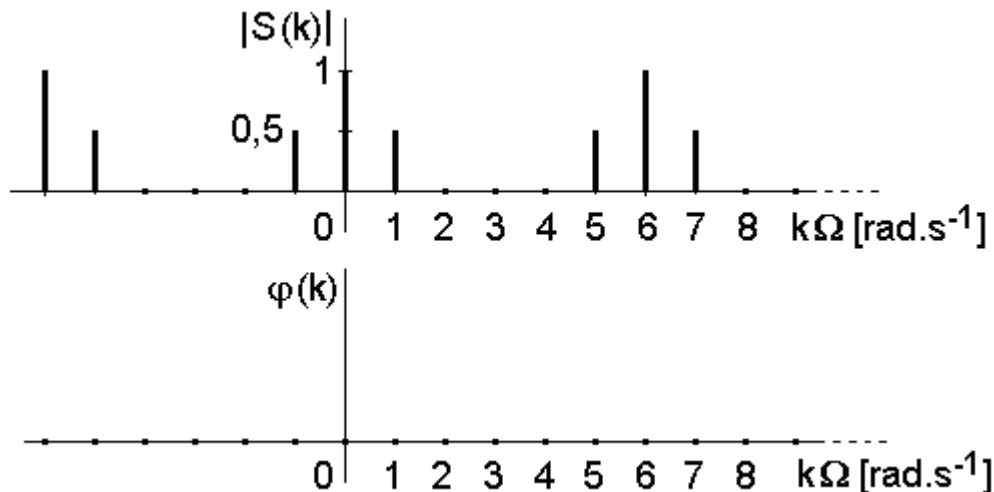
3. Pravděpodobnost a statistika

Ve sledované populaci má jistý typ rakoviny 0,5% lidí (*prevalence choroby*). Určitý diagnostický test dá v situaci, že testovaná osoba chorobu má, pozitivní výsledek s pravděpodobností 0,99 (*senzitivita testu*); pokud testovaná osoba chorobu nemá, dá test negativní výsledek s pravděpodobností 0,95 (*specifita testu*). Test dá vždy nějaký výsledek. Určete pravděpodobnost

- že test u náhodně vybrané osoby dá pozitivní výsledek;
- že testovaná osoba má rakovinu, pokud test dal pozitivní výsledek.
- Jistá osoba měla pozitivní výsledek testu. Byla testována podruhé a test dal negativní výsledek. Jaká je pravděpodobnost, že tato osoba nemá rakovinu.

4. Signály a systémy

Předpokládejme, že spektrum diskretního signálu má tvar podle následujícího obrázku:



- Jaká je vzorkovací frekvence signálu?
- Je daný signál periodický?
- Napište vztah pro daný signál v časové doméně;
- Nakreslete průběh signálu v časové doméně (označte správně osy)
- Jak se změní spektrum signálu, pokud se změní vzorkovací frekvence původního spojitého signálu na dvojnásobek?

5. Vícerozměrné metody

Byla provedena ordinační analýza souboru 152 typů aut. V přiloženém obrázku naleznete ukázkou dat (A) a výsledků analýzy (B - F).

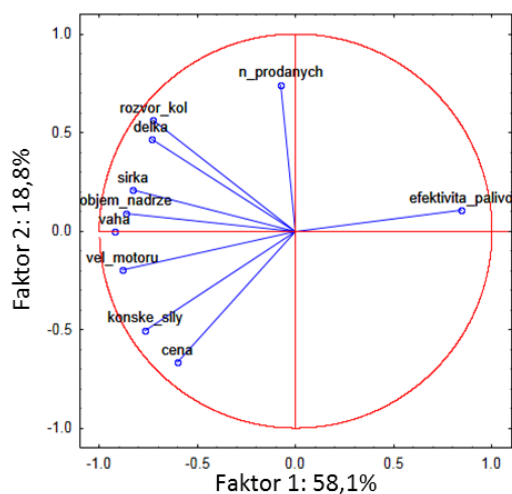
Po prostudování obrázků odpovězte na následující otázky:

- Byla k analýze použita analýza hlavních komponent či korespondenční analýza? Zdůvodněte. (2 body)
- Byla jako vstup do této analýzy použita kovarianční matice, autokorelační matice proměnných či matice korelačních koeficientů? Zdůvodněte. (2 body)
- Kolika nově vytvořenými proměnnými (faktory) bychom museli popsat datový soubor, abychom ztratili pouze 3% variability dat? (1 bod)
- Kolik nově vytvořených proměnných byste použili k popisu souboru V_y . Proč? (2 body)
- Interpretujte první nově vytvořenou proměnnou. (1 bod)
- Znázorněte rozmístění vybraných 6 typů aut v novém prostoru daném prvními dvěma nově vytvořenými proměnnými (viz část F v obrázku) a výsledek stručně interpretujte. (2 body)

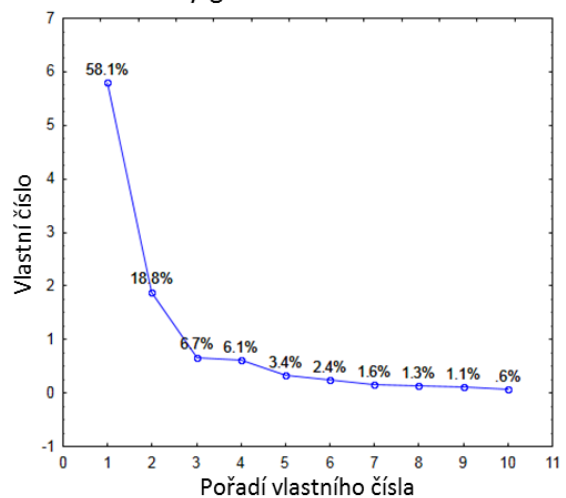
A. Ukázka vstupních dat

typ	n_prodaných (v tisících)	cena	vel_ motoru	konske_ sily	rozvor_ kol	sirka	delka	vaha	objem_ nadrze	efektivita_ palivo
BMW - 528i	17,5	38,9	2,8	193,0	111,4	70,9	188,0	3,5	18,5	24,8
Cadillac - Escalade	14,8	46,2	5,7	255,0	117,5	77,0	201,2	5,6	30,0	15,0
Chevrolet - Metro	21,9	9,2	1,0	55,0	93,1	62,6	149,4	1,9	10,3	45,0
Dodge - Dakota	111,3	17,0	2,5	120,0	131,0	71,5	215,0	3,6	22,0	19,0
Ford - Ranger	220,7	12,1	2,5	119,0	117,5	69,4	200,7	3,1	20,0	23,0
Ford - F-Series	540,6	26,9	4,6	220,0	138,5	79,1	224,5	4,2	25,1	18,0
Lincoln - Navigator	22,9	42,7	5,4	300,0	119,0	79,9	204,8	5,4	30,0	15,0
Mercedes-Benz SL	3,3	82,6	5,0	302,0	99,0	71,3	177,1	4,1	21,1	20,0
Porsche - Carrera	1,9	75,0	3,4	300,0	92,6	69,5	174,5	3,1	17,0	23,0
Toyota - Avalon	63,8	25,5	3,0	210,0	107,1	71,7	191,9	3,4	18,5	26,0
Volvo - S70	15,2	27,5	2,4	168,0	104,9	69,3	185,9	3,2	17,9	25,0

B. Pozice pův. proměnných na faktorových osách



C. Sutinový graf



D. Korelace pův. proměnných a faktorových os

	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3	Faktor 4
n_prodaných	-0,076	0,741	0,604	0,271
cena	-0,604	-0,666	0,232	-0,065
vel_motoru	-0,882	-0,200	0,228	-0,017
konske_sily	-0,766	-0,504	0,288	-0,172
rozvor_kol	-0,728	0,562	-0,106	-0,165
sirka	-0,831	0,209	-0,034	-0,206
delka	-0,735	0,464	-0,058	-0,395
vaha	-0,923	-0,004	-0,187	0,153
objem_nadrze	-0,865	0,090	-0,227	0,311
efektivita_palivo	0,845	0,105	0,109	-0,399

E. Vlastní čísla

	Vlastní číslo	% celk. rozptylu	Kumulativ. vl. číslo	Kumulativ. %
1	5,809	58,1	5,809	58,1
2	1,880	18,8	7,688	76,9
3	0,668	6,7	8,356	83,6
4	0,613	6,1	8,969	89,7
5	0,336	3,4	9,305	93,1
6	0,239	2,4	9,544	95,4
7	0,155	1,5	9,698	97,0
8	0,129	1,3	9,827	98,3
9	0,113	1,1	9,940	99,4
10	0,060	0,6	10,000	100,0

F. Pozice typů aut na faktorových osách

	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3	Faktor 4	Faktor 5	Faktor 6	Faktor 7	Faktor 8	Faktor 9	Fakt.10
BMW - 528i	-0,331	-0,437	-0,284	-0,432	-0,748	0,395	0,136	0,128	0,174	-0,093
Cadillac - Escalade	-6,068	-0,578	-1,124	1,053	0,091	0,219	-1,123	-0,172	0,493	-0,029
Chevrolet - Metro	7,338	-0,337	0,222	-0,797	-0,506	1,208	-1,966	0,771	0,776	0,000
Ford - Ranger	0,133	3,152	0,651	0,750	-0,861	-0,375	0,188	0,168	-0,367	-0,302
Lincoln - Navigator	-6,478	-0,345	-0,923	0,495	0,530	0,475	-0,683	0,111	0,052	0,582
Porsche - Carrera	-0,349	-4,004	1,679	-0,077	-0,683	0,657	0,333	-0,355	-0,791	-0,201

Čas pro vypracování je 120 minut. Každá úloha je hodnocena maximálně 10 body.



jméno:					
studijní obor: PřF BIMAT					
počet listů (včetně tohoto):					
1	2	3	4	5	celkem



Cvičná bakalářská zkouška, 3. varianta

1. Matematická analýza

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = 5x^2 \ln x.$$

2. Lineární algebra

Určete hodnotu neznámé $x \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & 2 \\ x^2 & -2 & x^2 \\ x & x & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

3. Pravděpodobnost a statistika

Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny, X_1 má exponenciální rozdělení s parametrem λ_1 a X_2 má exponenciální rozdělení s parametrem λ_2 . Hustota exponenciálního rozdělení $\text{Ex}(\lambda)$ je $f(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pro $x > 0$, přičemž $\lambda > 0$ je parametr tohoto rozdělení.

- Vypočtěte střední hodnotu $E(1 + 2X_1 - X_2)$.
- Odvoďte hustotu náhodné veličiny $S = X_1 + X_2$.

4. Vícerozměrné metody

Ve studii byl u 6 osob zjišťován systolický tlak a hladina celkového cholesterolu v krvi. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v přiložené tabulce.

Pacient	Systolický tlak (mmHg)	Celkový cholesterol (mmol/l)
A	165	4,5
B	125	4,7
C	160	7,5
D	170	7,0
E	130	4,0
F	165	6,5

Vztahy mezi pacienty jsou vyjádřeny následujícími asociačními maticemi:

A) Asociační matice počítaná na původních datech

	A	B	C	D	E	F
A	0	40,00	5,83	5,59	35,00	2,00
B	40,00	0	35,11	45,06	5,05	40,04
C	5,83	35,11	0	10,01	30,20	5,10
D	5,59	45,06	10,01	0	40,11	5,02
E	35,00	5,05	30,20	40,11	0	35,09
F	2,00	40,04	5,10	5,02	35,09	0

B) Asociační matice počítaná na standardizovaných datech

	A	B	C	D	E	F
A	0	2,04	2,05	1,71	1,81	1,35
B	2,04	0	2,60	2,77	0,54	2,37
C	2,05	2,60	0	0,61	2,82	0,72
D	1,71	2,77	0,61	0	2,87	0,42
E	1,81	0,54	2,82	2,87	0	2,46
F	1,35	2,37	0,72	0,42	2,46	0

Určete shluky pacientů pomocí aglomerativního hierarchického shlukování, získejte požadované výstupy a odpovězte na otázky:

1. Výše uvedené asociační matice vyjadřují podobnost nebo vzdálenost? Zdůvodněte. (1 bod)
2. Jakou z uvedených asociačních matic byste pro shlukování použili a proč? (2 body)
3. Vytvořte dendrogram pomocí algoritmu nejvzdálenějšího souseda. Rozepište jednotlivé kroky výpočtu. (2 body)
4. Pokud bychom v dendrogramu provedli řez na podobnosti/vzdálenosti 15 (v případě výpočtu pomocí asociační matice A) resp. 1,5 (v případě výpočtu pomocí asociační matice B), kolik dostaneme shluků? Kteří pacienti budou v jednotlivých shlucích? Výsledek interpretujte. (3 body)
5. Pokud bychom chtěli rozdělit osoby do několika shluků jednoho řádu, jakou metodu bychom použili? (1 bod)
6. Pokud bychom chtěli rozdělit osoby do několika skupin s podskupinami nižších řádů tak, že vzdálenost mezi shluky bude minimální vzdáleností mezi zástupci, jakou metodu bychom použili? (1 bod)

5. Signály a systémy

Mějme posloupnost $\{x_i\} = \{0, 1, 1, 0, 0, \dots\}$, kterou přivedeme na vstup systému s impulsní charakteristikou $\{y_i\} = \{1, 0, 0, \dots\}$.

- a) Je tento systém diskrétní nebo spojitý?
- b) Určete posloupnost na výstupu tohoto systému.
- c) Jak se změní výsledek, bude-li posloupnost $\{x_i\}$ představovat impulsní charakteristiku systému a $\{y_i\}$ vstupní posloupnost?
- d) Jaká je přenosová funkce soustavy, je-li její impulsní charakteristika dána posloupností $\{x_i\}$?
- e) Je taková soustava stabilní?

Čas pro vypracování je 120 minut. Každá úloha je hodnocena maximálně 10 body.