

jméno:					
studijní obor: PřF B-MBB BIOMB/EPIDM					
počet listů (včetně tohoto):					
1	2	3	4	5	celkem

Bakalářská zkouška z matematiky, 19. června 2023

1. Lineární algebra

Uvažujte euklidovský prostor \mathbb{R}^3 a lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, které je kolmou projekcí na podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^3$ zadaný rovnicí $x + 2y + z = 0$ (na rovinu $\varrho : x + 2y + z = 0$).

1. Určete jádro lineárního zobrazení φ . (Najděte nějaký vektor kolmý na rovinu ϱ .) (2 body)
2. Najděte bázi obrazu prostoru \mathbb{R}^3 při zobrazení φ . (Napište směrové vektory roviny ϱ .) (2 body)
3. Najděte orthonormální bázi obrazu prostoru \mathbb{R}^3 při zobrazení φ . (Napište směrové vektory roviny ϱ , které jsou jednotkové a navzájem kolmé.) (3 body)
4. Najděte obraz bodu $A = [0, 1, -1] \in \mathbb{R}^3$ při zobrazení φ . (Napište průsečík roviny ϱ a přímky na ni kolmé, která prochází bodem S) (3 body)

2. Matematická analýza

Uvažujte spojitou funkci f definovanou na intervalu $(-\infty, \infty)$ takovou, že

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

a funkci g danou předpisem $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Určete funkci f . (1 bod)
2. Vypočítejte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ (1 bod)
3. Najděte extrémní hodnoty funkcí f a g (1 bod)
4. Najděte inflexní body grafu funkce g . (2 body)
5. Načrtněte obrazec $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq x \leq g(x)\}$. (2 body)
6. Napište vzorec pro výpočet obsahu obrazce O . (2 body)

3. Pravděpodobnost a statistika

Čtyřikrát nezávisle na sobě házíme mincí. V úlohách 1.–3. předpokládejte, že mince je ideální (férová, spravedlivá).

1. Jaká je klasická pravděpodobnost, že ve čtvrtém hoďu nepadne líc, pokud v prvních třech hodech padl rub? (1 bod)
2. Jaká je klasická pravděpodobnost, že počet líců, které v této sérii padnou, je liché číslo? (1 bod)
3. Hodnota náhodné veličiny X je rovna počtu padnutých líců v této sérii.
 - a) Stanovte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X a načrtněte ji. (1 bod)
 - b) Stanovte distribuční funkci náhodné veličiny X a načrtněte ji. (1 bod)
 - c) Vypočítejte střední hodnotu náhodné veličiny X . (1 bod)
 - d) Vypočítejte směrodatnou odchylku náhodné veličiny X . (1 bod)
 - e) Vypočítejte asymetrii (šikmost) náhodné veličiny X . (1 bod)
4. Stanovme si hypotézy: H_0 – mince je ideální, H_1 – líc padá s pravděpodobností p a rub padá s pravděpodobností $1 - p$. Před provedením pokusu nic nevíme o pravděpodobnostech těchto hypotéz. V sérii čtyř nezávislých hodů padl čtyřikrát líc. Jaká je pak aposteriorní pravděpodobnost hypotézy H_0 ? (Vyjádřete ji pomocí parametru p .) (3 body)

4. Vícerozměrné metody

U šesti druhů hřibovitých hub byla změřena délka třeně a šířka klobouku. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v přiložené tabulce.

Druh houby	Označení	Délka třeně (cm)	Šířka klobouku (cm)
Klouzek sličný	KS	8	9
Kozák březový	KB	14	10
Křemenáč osikový	KO	15	12
Hřib hnědý	HH	8	10
Hřib smrkový	HS	12	14
Hřib žlutomasý	HŽ	6	7

Získejte požadované výstupy a odpovězte na následující otázky:

1. Která z uvedených matic je asociační maticí vyjadřující vzdálenost? Zdůvodněte. (2 body)

Matice 1:

	KS	KB	KO	HH	HS	HŽ
KS	1	0,4	0,3	0,9	0,4	0,7
KB	0,4	1	0,8	0,4	0,6	0,2
KO	0,3	0,8	1	0,3	0,6	0,1
HH	0,9	0,4	0,3	1	0,5	0,6
HS	0,4	0,6	0,6	0,5	1	0,1
HŽ	0,7	0,2	0,1	0,6	0,1	1

Matice 2:

	KS	KB	KO	HH	HS	HŽ
KS	0	6,1	7,6	1,0	6,4	2,8
KB	6,1	0	2,2	6,0	4,5	8,5
KO	7,6	2,2	0	7,3	3,6	10,3
HH	1,0	6,0	7,3	0	5,7	3,6
HS	6,4	4,5	3,6	5,7	0	9,2
HŽ	2,8	8,5	10,3	3,6	9,2	0

Matice 3:

	KS	KB	KO	HH	HS	HŽ
KS	0	6,1	9,3	3,3	6,6	9,7
KB	6,1	0	1,9	7,5	1,9	5,4
KO	0,2	5,7	0	6,1	7,6	7,4
HH	3,7	1,4	5,2	0	2,9	5,5
HS	0	4,8	1,8	1,2	0	3,5
HŽ	9,2	9,6	3,1	8,1	4,1	0

2. Byla pro výpočet zvolené asociační matice použita Euklidova metrika vzdálenosti či Hammingova (manhattanská) metrika vzdálenosti? Zdůvodněte. (1 bod)
3. Použijte asociační matici zvolenou v bodu 1 k vytvoření dendrogramu pomocí algoritmu nejbližšího souseda. Rozepište jednotlivé kroky výpočtu. (2 body)
4. Pokud byste v dendrogramu provedli řez na vzdálenosti 4, kolik dostanete shluků? Které houby budou v jednotlivých shlucích? Shluky stručně charakterizujte. (3 body)
5. Které dvě houby jsou si nejméně podobné a proč? (1 bod)
6. Jaké další algoritmy kromě algoritmu nejbližšího souseda byste mohli použít pro hierarchické aglomerativní shlukování? Uveďte dva příklady. (1 bod)

5. Regresní modelování

Pro predikci rizika výskytu tzv. reakce štěpu proti hostiteli (*graft versus host disease*, GvHD) u pacientů podstupujících transplantaci kostní dřeň byl zkonstruován vícenásobný logistický regresní model. Model poskytl následující bodové odhady regresních koeficientů:

Proměnná	Bodový odhad regresního koeficientu
Absolutní člen (<i>intercept</i>)	-5,296
Věk dárce v letech	0,114
Typ leukémie (ALL)	-0,397
Typ leukémie (CML)	1,691
Těhotenství dárkyně	1,722
\log_{10} (index směsné lymfocytární reakce)	1,841

Hodnoty proměnné Typ leukémie:

- AML akutní myeloidní leukémie (referenční hodnota)
- ALL akutní lymfoblastická leukémie
- CML chronická myeloidní leukémie

Hodnoty proměnné Těhotenství dárkyně:

- 0 Ne
- 1 Ano

Otázky:

1. Jaký je odhadovaný poměr šancí (*odds ratio*) na GvHD asociovaný s tím, že dárkyně je těhotná? (1 bod)
2. Jaký je odhadovaný poměr šancí na GvHD pro pacienta léčeného s CML ve srovnání s pacientem léčeným s ALL? Jaký věkový rozdíl dárců by odpovídal stejnému poměru šancí? (3 body)
3. Jaký je poměr šancí na GvHD pro pacienta s CML a indexem směsné lymfocytární reakce 3,0, ve srovnání s pacientem s AML a indexem směsné lymfocytární reakce 1,0? (3 body)
4. Stanovte predikovanou pravděpodobnost GvHD pro 35letou osobu s AML, která obdržela kostní dřeň od těhotné dárkyně, index směsné lymfocytární reakce je 2,5. (3 body)